2.2 ★★ 不要被阶乘吓倒

阶乘（Factorial）是个很有意思的函数，但是不少人都比较怕它，我们来看看两个与阶乘相关的问题：

1. 给定一个整数N，那么N的阶乘N！末尾有多少个0呢？例如：$N=10$，N！$=3\,628\,800$，N！的末尾有两个0。

2. 求N！的二进制表示中最低位1的位置。

分析与解法

有些人碰到这样的题目会想：是不是要完整计算出 N！的值？如果溢出怎么办？事实上，如果我们从“哪些数相乘能得到 10”这个角度来考虑，问题就变得简单了。

首先考虑，如果 $N! = K \times 10^M$，且 K 不能被 10 整除，那么 N！末尾有 M 个 0。再考虑对 N！进行质因数分解，$N! = (2^x) \times (3^y) \times (5^z) \cdots$，由于 $10 = 2 \times 5$，所以 M 只跟 X 和 Z 相关，每一对 2 和 5 相乘可以得到一个 10，于是 $M = \min(X, Z)$。不难看出 X 大于等于 Z，因为能被 2 整除的数出现的频率比能被 5 整除的数高得多，所以把公式简化为 $M = Z$。

根据上面的分析，只要计算出 Z 的值，就可以得到 N！末尾 0 的个数。

【问题 1 的解法一】

要计算 Z，最直接的方法，就是计算 i（i =1, 2, …, N）的因式分解中 5 的指数，然后求和：

代码清单 2-6

```
ret = 0;
for(i = 1; i <= N; i++)
{
    j = i;
    while(j % 5 ==0)
    {
        ret++;
        j /= 5;
    }
}
```

【问题 1 的解法二】

公式：$Z = [N/5] + [N/5^2] + [N/5^3] + \cdots$（不用担心这会是一个无穷的运算，因为总存在一个 K，使得 $5^K > N$，$[N/5^K]=0$。）

公式中，$[N/5]$表示不大于 N 的数中 5 的倍数贡献一个 5，$[N/5^2]$表示不大于 N 的数中 5^2 的倍数再贡献一个 5，……代码如下：

```
ret = 0;
while(N)
{
    ret += N / 5;
    N /= 5;
}
```

问题 2 要求的是 N！的二进制表示中最低位 1 的位置。给定一个整数 N，求 N！二进制表示的最低位 1 在第几位？例如：给定 $N = 3$，$N! = 6$，那么 N！的二进制表示（1 010）的最低位 1 在第二位。

为了得到更好的解法，首先要对题目进行一下转化。

首先来看一下一个二进制数除以 2 的计算过程和结果是怎样的。

把一个二进制数除以 2，实际过程如下：

判断最后一个二进制位是否为 0，若为 0，则将此二进制数右移一位，即为商值（为什么）；反之，若为 1，则说明这个二进制数是奇数，无法被 2 整除（这又是为什么）。

所以，这个问题实际上等同于求 N！含有质因数 2 的个数。即答案等于 N！含有质因数 2 的个数加 1。

【问题 2 的解法一】

由于 $N!$ 中含有质因数 2 的个数，等于 $N/2 + N/4 + N/8 + N/16 + \cdots$[1]，

根据上述分析，得到具体算法，如下所示：

代码清单 2-7

```
int lowestOne(int N)
{
    int Ret = 0;
    while(N)
    {
        N >>= 1;
        Ret += N;
    }
    return Ret;
}
```

【问题 2 的解法二】

N！含有质因数 2 的个数，还等于 N 减去 N 的二进制表示中 1 的数目。我们还可以通过这个规律来求解。

下面对这个规律进行举例说明，假设 $N = 11011$，那么 $N!$中含有质因数 2 的个数为 $N/2 + N/4 + N/8 + N/16 + \cdots$

即：

$$
\begin{aligned}
&1101 + 110 + 11 + 1\\
&= (1000 + 100 + 1)\\
&+ (100 + 10)\\
&+ (10 + 1)\\
&+ 1\\
&= (1000 + 100 + 10 + 1) + (100 + 10 + 1) + 1\\
&= 1111 + 111 + 1\\
&= (10000 - 1) + (1000 - 1) + (10 - 1) + (1 - 1)
\end{aligned}
$$

[1] 这个规律请读者自己证明（提示 N/k，等于 1, 2, 3, …, N 中能被 k 整除的数的个数）。

$= 11011-N$ 二进制表示中 1 的个数

小结

任意一个长度为 m 的二进制数 N 可以表示为 $N = b[1] + b[2] * 2 + b[3] * 2^2 + \cdots + b[m] * 2^{(m-1)}$，其中 $b[i]$表示此二进制数第 i 位上的数字（1 或 0）。所以，若最低位 $b[1]$为 1，则说明 N 为奇数；反之为偶数，将其除以 2，即等于将整个二进制数向低位移一位。

相关题目

给定整数 n，判断它是否为 2 的方幂（解答提示：n>0&&（（n&（n−1））==0））。